

Zéros de polynômes de Kostlan: moments, loi des grands nombres et théorème central limite

Thomas Letendre (Sorbonne Université)
en collaboration avec M. Ancona et M. Puchol

Paris – 21 novembre 2019



Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n .
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Polynômes de Kostlan

Un polynôme de Kostlan de degré d est un polynôme aléatoire homogène

$$P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n],$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des gaussiennes standards i.i.d. dans \mathbb{R} .

Pour tout $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$:

- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$ est la longueur de α ;
- $\alpha! = \alpha_0! \dots \alpha_n!$ et, si $|\alpha| = d$, $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!}$;
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Zéros de polynômes de Kostlan

Soient $d \geq 1$, $n \geq 1$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

$$Z_d = P_1^{-1}(0) \cap \dots \cap P_r^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n,$$

où P_1, \dots, P_r sont des polynômes de Kostlan i.i.d. dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$.

Lemme

Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse, compacte sans bord et de codimension r dans \mathbb{S}^n (éventuellement vide).

Zéros de polynômes de Kostlan

Soient $d \geq 1$, $n \geq 1$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

$$Z_d = P_1^{-1}(0) \cap \dots \cap P_r^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n,$$

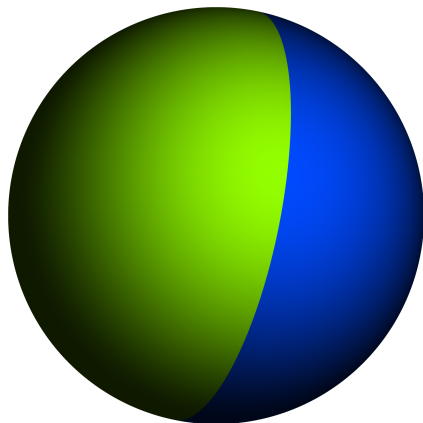
où P_1, \dots, P_r sont des polynômes de Kostlan i.i.d. dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$.

Lemme

Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse, compacte sans bord et de codimension r dans \mathbb{S}^n (éventuellement vide).

Plus généralement, Z_d sous-variété algébrique aléatoire de degré d et de codimension r dans une variété projective réelle M de dimension n .

Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$$d = 1$$

Images par Vincent Beffara.

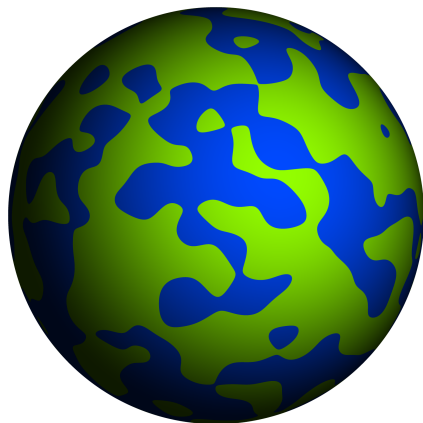
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$$d = 2$$

Images par Vincent Beffara.

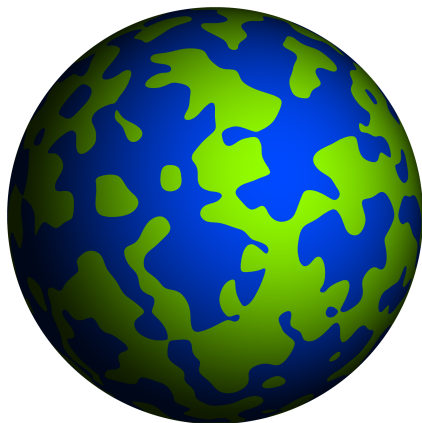
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$$d = 100$$

Images par Vincent Beffara.

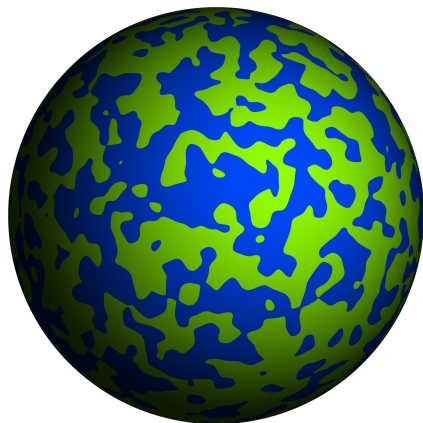
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 200$$

Images par Vincent Beffara.

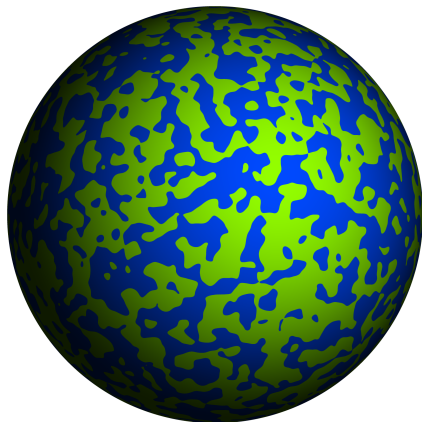
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$$d = 500$$

Images par Vincent Beffara.

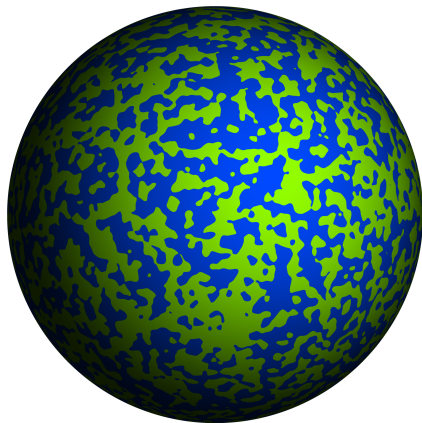
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$$d = 1000$$

Images par Vincent Beffara.

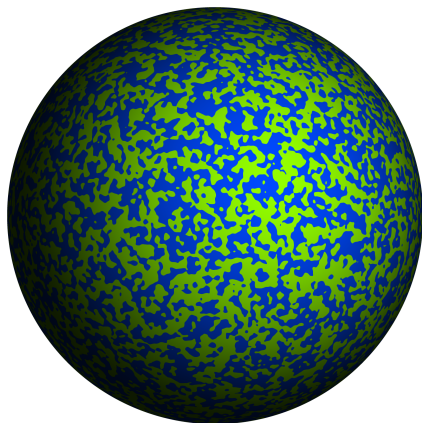
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$d = 2000$

Images par Vincent Beffara.

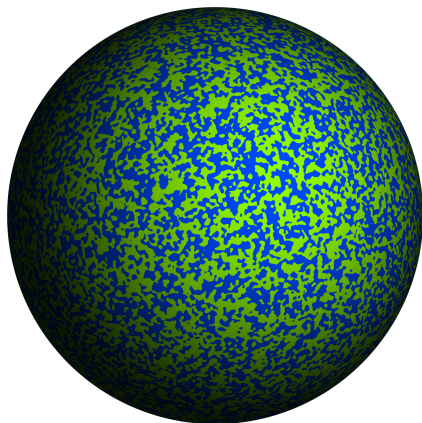
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$$d = 5000$$

Images par Vincent Beffara.

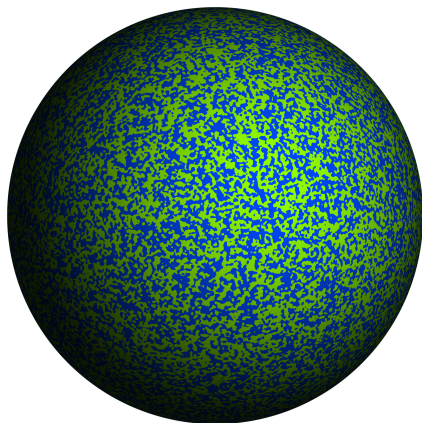
Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$d = 10000$

Images par Vincent Beffara.

Courbe algébrique aléatoire dans \mathbb{S}^2 ($n = 2, r = 1$)



$d = 20000$

Images par Vincent Beffara.

Statistiques linéaires

La métrique euclidienne sur \mathbb{S}^n (resp. riemannienne sur M) induit des mesures de volume sur \mathbb{S}^n (resp. M) et toutes ses sous-variétés.

Z_d définit une mesure de Radon aléatoire par :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(M), \quad \langle Z_d, \phi \rangle = \int_{x \in Z_d} \phi(x) |dV_{Z_d}|.$$

Pour $\phi = \mathbf{1}$, on a $\langle Z_d, \mathbf{1} \rangle = \text{Vol}(Z_d)$.

Cas de codimension maximale ($r = n$)

Z_d est fini presque sûrement. La mesure associée est $\sum_{x \in Z_d} \delta_x$, c'est-à-dire :

$$\langle Z_d, \phi \rangle = \sum_{x \in Z_d} \phi(x).$$

Moments, loi des grands nombres et théorème central limite

Espérance

Z_d de degré d et codimension r dans M de dimension n .

Théorème (L., 2016)

Pour tout $\phi \in C^0(M)$, on a :

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} A_{n,r} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) + \|\phi\|_{\infty} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

$$\text{où } A_{n,r} = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)}.$$

Espérance

Z_d de degré d et codimension r dans M de dimension n .

Théorème (L., 2016)

Pour tout $\phi \in C^0(M)$, on a :

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} A_{n,r} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) + \|\phi\|_{\infty} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

$$\text{où } A_{n,r} = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)}.$$

Corollaire (Équidistribution en moyenne)

En tant que formes linéaire continues sur $(C^0(M), \|\cdot\|_{\infty})$,

$$d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} |dV_M|.$$

Théorème (L.–Puchol, 2017)

Il existe $\sigma_{n,r} > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \sigma_{n,r}^2 \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right).$$

- Pour le nombre de racines de n polynômes de Kostlan dans \mathbb{S}^n ($n = r$ et $\phi = \mathbf{1}$) prouvé par Armentano–Azaïs–Dalmao–Leòn (2015 et 2017).
- $\sigma_{n,r}$ est explicite et ne dépend que de n et r .
- La positivité de $\sigma_{n,r}$ est non triviale.

Moments centrés

Pour X variable aléatoire L^p ($p \geq 2$), on note $m_p(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Dans le cas $n = r = 1$, pour tout $p \geq 2$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d, \phi \rangle) = \mu_p \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}),$$

où μ_p est le p -ième moment d'une gaussienne standard dans \mathbb{R} .

Moments centrés

Pour X variable aléatoire L^p ($p \geq 2$), on note $m_p(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Dans le cas $n = r = 1$, pour tout $p \geq 2$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d, \phi \rangle) = \mu_p \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}),$$

où μ_p est le p -ième moment d'une gaussienne standard dans \mathbb{R} .

Conjecture

Pour n et r quelconques, même formule en remplaçant $\frac{p}{4}$ par $\frac{p}{2}(r - \frac{n}{2})$.

Loi forte des grands nombres

$(Z_d)_{d \geq 1}$ suite de sous-variétés algébriques aléatoires de codimension r dans M de dimension n telle que :

- les termes sont globalement indépendants,
- Z_d est de degré d et distribuée comme précédemment.

Théorème (L.–Puchol, 2017 ; Ancona–L., 2019)

Si $n = 1$ ou $n \geq 3$ alors, presque sûrement, pour tout $\phi \in C^0(M)$ on a :

$$d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d, \phi \rangle \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} \int_M \phi |dV_M|.$$

Loi forte des grands nombres

$(Z_d)_{d \geq 1}$ suite de sous-variétés algébriques aléatoires de codimension r dans M de dimension n telle que :

- les termes sont globalement indépendants,
- Z_d est de degré d et distribuée comme précédemment.

Théorème (L.–Puchol, 2017 ; Ancona–L., 2019)

Si $n = 1$ ou $n \geq 3$ alors, presque sûrement, pour tout $\phi \in C^0(M)$ on a :

$$d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d, \phi \rangle \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} \int_M \phi |dV_M|.$$

En particulier, presque sûrement $d^{-\frac{r}{2}} \text{Vol}(Z_d) \rightarrow A_{n,r} \text{Vol}(M)$ et

$$\frac{1}{\text{Vol}(Z_d)} Z_d \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Vol}(M)} |dV_M|.$$

Théorème central limite

Théorème (Ancona–L., 2019)

Si $n = r = 1$, pour tout $\phi \in C^0(M)$, on a :

$$\frac{1}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}} \left(\langle Z_d, \phi \rangle - d^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \int_M \phi |dV_M| \right) \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{loi} \mathcal{N} \left(0, \int_M \phi^2 |dV_M| \right).$$

- On conjecture un résultat similaire pour tout (n, r) .
- Prouvé par Armentano–Azaïs–Dalmao–Leòn pour le volume des zéros de polynômes de Kostlan dans \mathbb{S}^n .

Théorème central limite fonctionnel

Définition

Le bruit blanc gaussien sur M est la distribution aléatoire W telle que : pour tout $\phi_1, \dots, \phi_k \in C^\infty(M)$, $(\langle W, \phi_i \rangle)_{1 \leq i \leq k}$ est un vecteur gaussien centré dans \mathbb{R}^k , de covariance $\left(\int_M \phi_i \phi_j |dV_M| \right)_{1 \leq i, j \leq k}$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Si $n = r = 1$, on a :

$$\frac{1}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}} \left(Z_d - d^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} |dV_M| \right) \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} W,$$

dans $\mathcal{D}'(M)$ et dans $H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(M)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Éléments de preuves

Théorème central limite ($n = r = 1$)

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, pour tout d , $X_d = \frac{\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}}$ est centrée et :

$$\forall p \geq 2, \quad m_p(X_d) = \frac{m_p(\langle Z_d, \phi \rangle)}{d^{\frac{p}{4}} \sigma_{1,1}^p} \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \mu_p \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Par le théorème des moments $X_d \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \mathcal{N} \left(0, \int_M \phi^2 |dV_M| \right)$, et on a :

$$\frac{1}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}} \left(\langle Z_d, \phi \rangle - d^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \int_M \phi |dV_M| \right) = X_d + O(d^{-\frac{1}{2}}).$$

Fonctionnelle caractéristique

Définition

Pour une distribution aléatoire $T \in \mathcal{D}'(M)$, la fonctionnelle caractéristique de T est $\chi_T : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\chi_T(\phi) = \mathbb{E}[e^{i\langle T, \phi \rangle}]$.

Exemple : $\chi_W(\phi) = \mathbb{E}[e^{i\langle W, \phi \rangle}] = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|_2^2}$ car $\langle W, \phi \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$.

Fonctionnelle caractéristique

Définition

Pour une distribution aléatoire $T \in \mathcal{D}'(M)$, la fonctionnelle caractéristique de T est $\chi_T : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\chi_T(\phi) = \mathbb{E}[e^{i\langle T, \phi \rangle}]$.

Exemple : $\chi_W(\phi) = \mathbb{E}[e^{i\langle W, \phi \rangle}] = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|_2^2}$ car $\langle W, \phi \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$.

Pour tout d , $T_d = \frac{1}{d^{\frac{1}{4}}\sigma_{1,1}} \left(Z_d - d^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} |dV_M| \right)$ distribution aléatoire.

Comme $\langle T_d, \phi \rangle \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$, on a :

$$\chi_{T_d}(\phi) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle T_d, \phi \rangle}\right] \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|_2^2} = \chi_W(\phi).$$

Fonctionnelle caractéristique

Définition

Pour une distribution aléatoire $T \in \mathcal{D}'(M)$, la fonctionnelle caractéristique de T est $\chi_T : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\chi_T(\phi) = \mathbb{E}[e^{i\langle T, \phi \rangle}]$.

Exemple : $\chi_W(\phi) = \mathbb{E}[e^{i\langle W, \phi \rangle}] = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|_2^2}$ car $\langle W, \phi \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$.

Pour tout d , $T_d = \frac{1}{d^{\frac{1}{4}}\sigma_{1,1}} \left(Z_d - d^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} |dV_M| \right)$ distribution aléatoire.

Comme $\langle T_d, \phi \rangle \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$, on a :

$$\chi_{T_d}(\phi) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle T_d, \phi \rangle}\right] \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|_2^2} = \chi_W(\phi).$$

Par le théorème de Lévy–Fernique, $T_d \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} W$ dans $\mathcal{D}'(M)$.

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Sa fonction de corrélation est :

$$e_d(x, y) = \mathbb{E}[P(x)P(y)] = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = (\langle x, y \rangle)^d = \cos(\rho(x, y))^d,$$

où ρ est la distance géodésique sur \mathbb{S}^n .

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Sa fonction de corrélation est :

$$e_d(x, y) = \mathbb{E}[P(x)P(y)] = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = (\langle x, y \rangle)^d = \cos(\rho(x, y))^d,$$

où ρ est la distance géodésique sur \mathbb{S}^n .

Remarque

En prenant des dérivées partielles : $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) P(y) \right]$.

Dans le cas général, $e_d(x, y) \simeq \exp\left(-\frac{d}{2}\rho(x, y)^2\right)$.

Formule de Kac–Rice (cas des hypersurfaces, $r = 1$)

Théorème

Pour tout d assez grand, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E} \left[\int_{Z_d} \phi \, |dV_{Z_d}| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|\nabla_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}} |dV_M|.$$

Formule de Kac–Rice (cas des hypersurfaces, $r = 1$)

Théorème

Pour tout d assez grand, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E} \left[\int_{Z_d} \phi |dV_{Z_d}| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|\nabla_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}} |dV_M|.$$

$(P(x), \nabla_x P)$ est gaussien centré, de covariance :

$$\begin{pmatrix} e_d(x, x) & \partial_{y_j} e_d(x, x) \\ \partial_{x_i} e_d(x, x) & \partial_{x_i} \partial_{y_j} e_d(x, x) \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}.$$

La densité ne dépend que de e_d et des ses premières dérivées en (x, x) .

Formule de Kac–Rice pour les moments

Pour tout $p \geq 2$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d, \phi \rangle) = \int_{M^p} \left(\prod_{i=1}^p \phi(x_i) \right) \mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p) |dV_M|^p.$$

- $\mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p)$ ne dépend que des premières dérivées de e_d en (x_i, x_j) .
- \mathcal{D}_d^p est singulière le long de $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p) \in M^p \mid \exists i \neq j, x_i = x_j\}$.

Asymptotique de la variance

Estimées sur \mathcal{D}_d^2

- $|\mathcal{D}_d^2(x, y)| = O(d^{r - \frac{n}{2} - 1})$ uniformément sur $\rho(x, y) \geq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.
- $\mathcal{D}_d^2(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|)$ sur $\|z\| \leq K \ln d$.

Asymptotique de la variance

Estimées sur \mathcal{D}_d^2

- $|\mathcal{D}_d^2(x, y)| = O(d^{r-\frac{n}{2}-1})$ uniformément sur $\rho(x, y) \geq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.
- $\mathcal{D}_d^2(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|)$ sur $\|z\| \leq K \ln d$.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) &\simeq \int_{\rho(x, y) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}} \phi(x) \phi(y) \mathcal{D}_d^2(x, y) \, dx \, dy \\ &\simeq d^{-\frac{n}{2}} \int_{x \in M} \int_{\|z\| \leq K \ln d} \phi(x) \phi\left(x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \mathcal{D}_d^2\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \, dz \, dx \\ &\simeq d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi(x)^2 \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(\|z\|) \, dz \right).\end{aligned}$$

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geq 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geq 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Les composantes connexes de $G_d(x)$ donnent une partition de $\{1, \dots, p\}$:

$\mathcal{I}_d(x) = \{I_1, \dots, I_m\}$, i.e. $\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \{1, \dots, p\}$.

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geq 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Les composantes connexes de $G_d(x)$ donnent une partition de $\{1, \dots, p\}$:
 $\mathcal{I}_d(x) = \{I_1, \dots, I_m\}$, i.e. $\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \{1, \dots, p\}$.

Si \mathcal{I} partition de $\{1, \dots, p\}$, on définit : $M_{\mathcal{I},d}^p = \{x \in M^p \mid \mathcal{I}_d(x) = \mathcal{I}\}$.

$$M^p = \bigsqcup_{\mathcal{I} \text{ partition}} M_{\mathcal{I},d}^p \quad \text{et} \quad \text{Vol} \left(M_{\mathcal{I},d}^p \right) = O \left(\left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}} \right)^{p-m} \right).$$

Contributions des $M_{\mathcal{I},d}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{l_1, \dots, l_m\}$ avec m petit

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I},d}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}} (\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Contributions des $M_{\mathcal{I},d}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{l_1, \dots, l_m\}$ avec m petit

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I},d}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}} (\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Partitions \mathcal{I} contenant un singleton

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{4}-1})$ uniformément sur $M_{\mathcal{I},d}^p$. Contribue $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Contributions des $M_{\mathcal{I},d}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_m\}$ avec m petit

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I},d}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}} (\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Partitions \mathcal{I} contenant un singleton

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{4}-1})$ uniformément sur $M_{\mathcal{I},d}^p$. Contribue $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Partitions en paires $\mathcal{I} = \{\{a_i, b_i\} \mid 1 \leq i \leq \frac{p}{2}\}$

Sur $M_{\mathcal{I},d}^p$, on a $\mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p) \simeq \prod_{i=1}^{\frac{p}{2}} \mathcal{D}_d^2(x_{a_i}, x_{b_i})$. Contribue :

$$\prod_{i=1}^{\frac{p}{2}} \int_{\rho(x_{a_i}, x_{b_i}) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}} \phi(x_{a_i}) \phi(x_{b_i}) \mathcal{D}_d^2(x_{a_i}, x_{b_i}) dx_{a_i} dx_{b_i} \simeq \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}}.$$

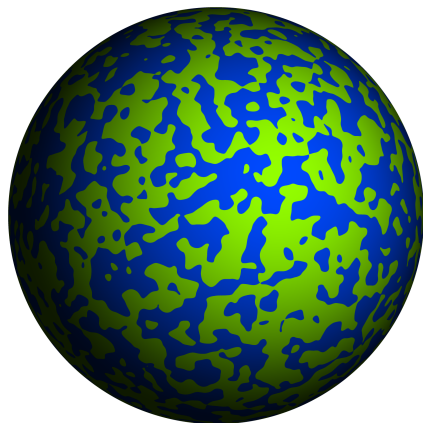
Conclusion de la preuve

- Chaque partition en paires contribue $\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}}$.
- Les autres partitions contribuent $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Le nombre de partitions en paires de $\{1, \dots, p\}$ est :

$$\mu_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \\ \frac{p!}{2^{\frac{p}{2}} (\frac{p}{2})!} & \text{si } p \text{ est pair.} \end{cases}$$

Merci de votre attention



Courbe algébrique aléatoire de degré $d = 1000$ dans \mathbb{S}^2 .

Image par Vincent Beffara.